L'Istituto Primo Levi di Vignola
Scuola-Polo per la formazione dell'Ambito 11 Emilia Romagna

La matematica e la fisica del discreto

Esperto: Andrea Spagni

- Liceo Scientifico «A.F. Formiggini» Sassuolo (MO)
- Docente a contratto per il corso di Fisica I nel corso di Laurea in «Ingegneria Meccatronica» presso il D.I.S.M.I dell'Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
- Dall'A.A. 2000-2001 fino all'A.A. 2014-2015 (Didattica della Fisica nei corsi S.S.I.S. e T.F.A.)

Lezione del 08-10-2020

"Un'educazione al pensiero computazionale può essere messa in atto scontrandosi con i problemi imposti dalla necessità di condividere , nel linguaggio formale per calcolatori e nella comunicazione tra matematici, gli aspetti convenzionali del calcolo e della scrittura degli algoritmi. Un'introduzione agli automi come esecutori di operazioni binarie e di funzioni come generatori di valori univoci dipendenti dall'input, mostrerà una possibile strategia per rafforzare, all'inizio del biennio delle superiori (ma anche alle scuole medie inferiori) , la comprensione delle procedure formali del calcolo e del concetto di funzione composta. Ad un livello superiore si affronteranno anche automi ricorsivi presentando anche una interpretazione grafica degli algoritmi ricorsivi e delle successioni date per ricorrenza. Al termine della lezione entreranno in scena, inaspettati, i famosi numeri di Fibonacci **e strane funzioni «cicliche» ottenute in modo misterioso…**

"In matematica è sempre consigliabile arrivare ad un'idea per più strade, per non confondere quest'idea con la strada che ci ha condotti ad essa"

G. Arrigo

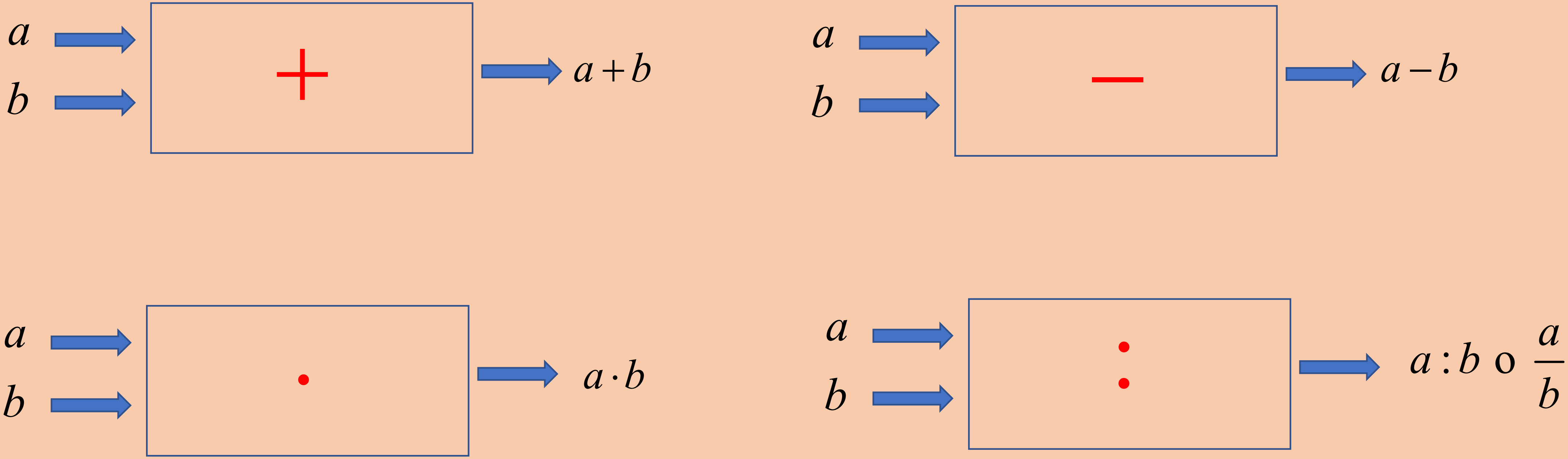
“Dare la precedenza …”

- Necessità di comunicare in modo non ambiguo l’ordine delle operazioni da eseguire.
- Training su problemi concreti in cui non importa trovare la soluzione ma piuttosto scrivere un “pizzino” in cui è descritto l’operazione necessaria alla soluzione (**scrittura formale di un algoritmo**)
- Evitare di considerare, proprio per l’apparente facilità delle regole di precedenza, gli errori “incomprensibili”: dietro un errore si cela sempre un motivo (esempi di analisi dell’errore)

Le operazioni come «macinini»

- Interpretazione delle operazioni come funzioni (concetto centrale che si voglia potenziare…)
- Esempi di “automi” (approccio ludico)
- Traduzione di espressioni verbali e letterali
- Indoviniamo l’input: una prima introduzione alle equazioni (strategie non formalizzate…)
- Ricaduta sulla capacità di risolvere giochi matematici

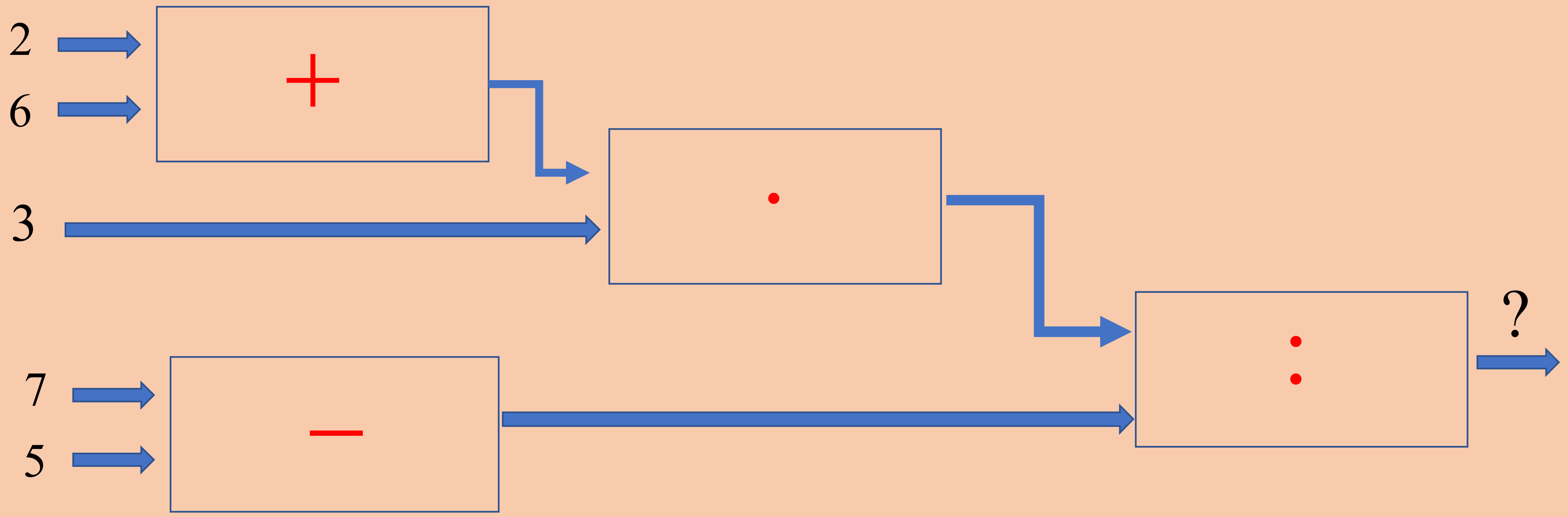
Le quattro operazioni



Si osservi che

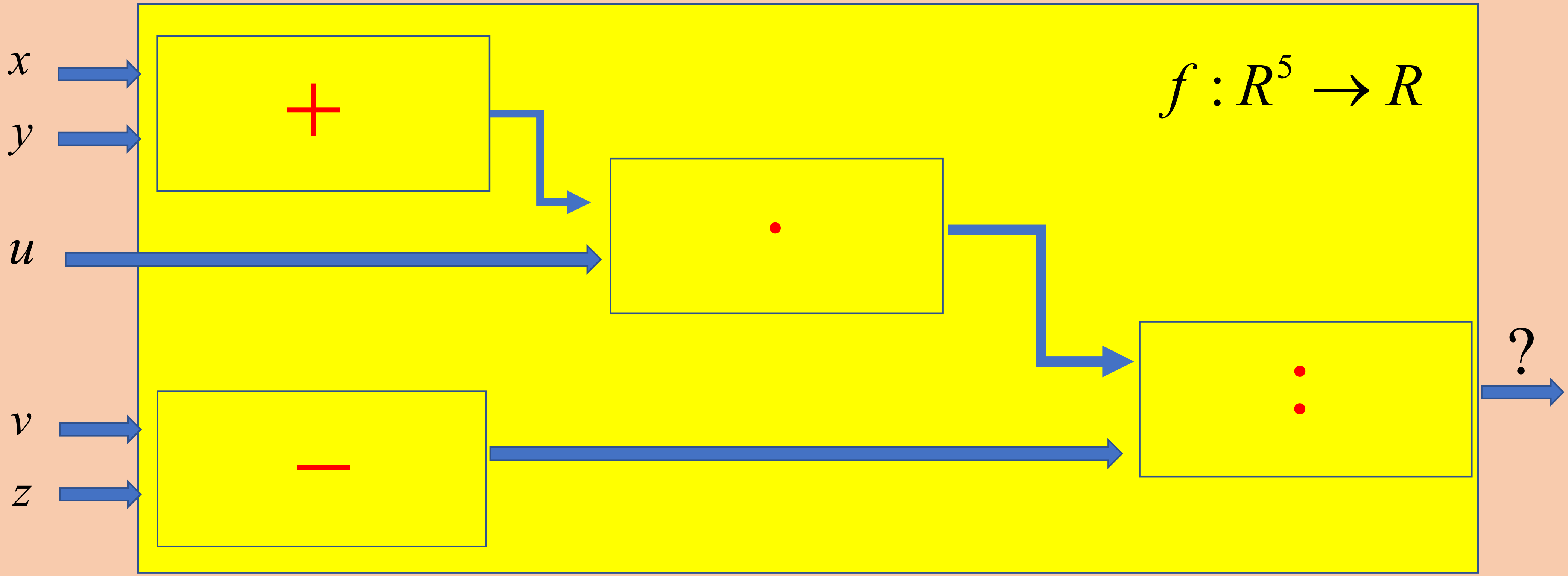
- Il risultato di uscita deve essere unico
- Nelle operazioni non commutative è importante stabilire in modo convenzionale il ruolo delle variabili in ingresso
- Alcuni macinini non funzionano per certi valori della variabile di ingresso

Approccio ludico (1)



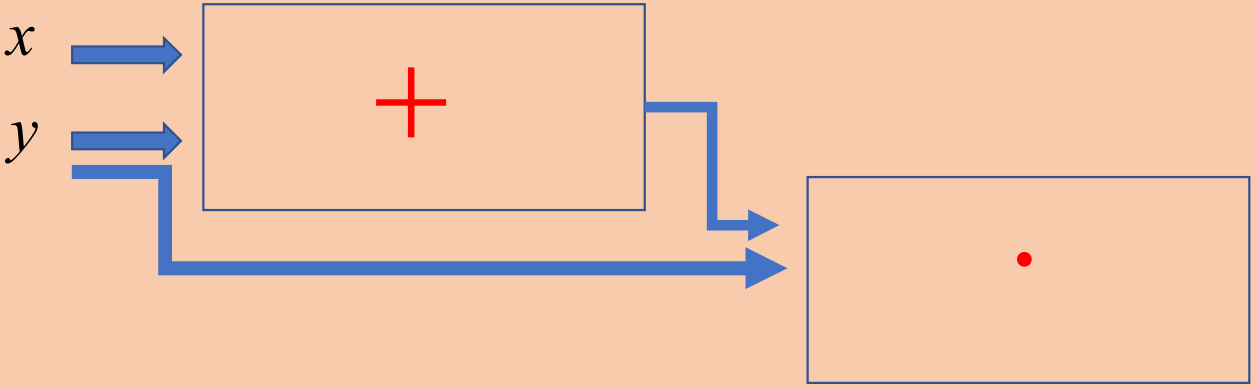
- Provare con varie quintuple di numeri in ingresso
- Vi sono quintuple di numeri per l'automa non funziona?
- Fissati i primi quattro numeri, quanto deve valere il quinto per ottenere un certo output ?

Approccio ludico (2)



- Scrivere l'output in funzione di x, y, u, v, z (sorge spontanea la necessità di parentesi per comunicare in modo non ambiguo il risultato dell'output) $\dfrac{(x+y)\cdot u}{v-z}$

Approccio ludico (3)



Nulla osta che uno stesso numero possa essere contemporaneamente l'ingresso di più automi.

- Scrivere l'output in funzione di x, y (sorge spontanea la necessità di parentesi per comunicare in modo non ambiguo il risultato dell'output)

$$(x+y)\cdot y$$

Esercizi proposti

- Usando gli automi elementari (le quattro operazioni), costruire automi che realizzino il seguente output:

1. $(x+y)-u\cdot v$ ricevendo in ingresso i numeri x, y, u,v
2. $\dfrac{a+b}{a-b}$ ricevendo in ingresso i numeri a e b
3. $\dfrac{x}{yz+t}$ ricevendo in ingresso i numeri x, y, z, t

Il concetto di funzione (1)

Negli esempi precedenti l'output di uscita dipendeva da più di una variabile in ingresso; possiamo costruire automi, che chiameremo **funzioni**, per i quali la variabile di ingresso è solo una e **che associano a tale variabile un unico valore di uscita**

$$x \rightarrow \boxed{\quad f \quad} \rightarrow y = f(x)$$

Il passaggio al concetto di funzione consiste, nel caso di automi ad input multipli, nel fissare i valore di tutte le variabili ingresso, tranne una. Questo rende possibile la descrizione dell'azione che la funzione esercita sulla unica variabile in ingresso , in modo aderente al linguaggio naturale

Il concetto di funzione (2)

$$x \to \boxed{\;f\;} \to y = f(x)$$

Il passaggio al concetto di funzione consiste, nel caso di automi ad input multipli, nel fissare i valore di tutte le variabili ingresso, tranne una. Questo rende possibile la descrizione dell'azione che la funzione esercita sulla unica variabile in ingresso in modo aderente al linguaggio naturale

$$\begin{matrix} 6 \Rightarrow \\ x \Rightarrow \end{matrix} \boxed{\;+\;} \Rightarrow x+6$$

$$x \Rightarrow \boxed{\text{somma } 6} \Rightarrow y = x+6$$

Le funzioni inverse

$$x \rightarrow \boxed{\quad f \quad} \rightarrow y = f(x)$$

$$x = f^{-1}(y) \leftarrow \boxed{\quad f^{-1} \quad} \leftarrow y$$

Le funzioni inverse delle operazioni elementari

$x \rightarrow$ somma 6 $\rightarrow y = x + 6$

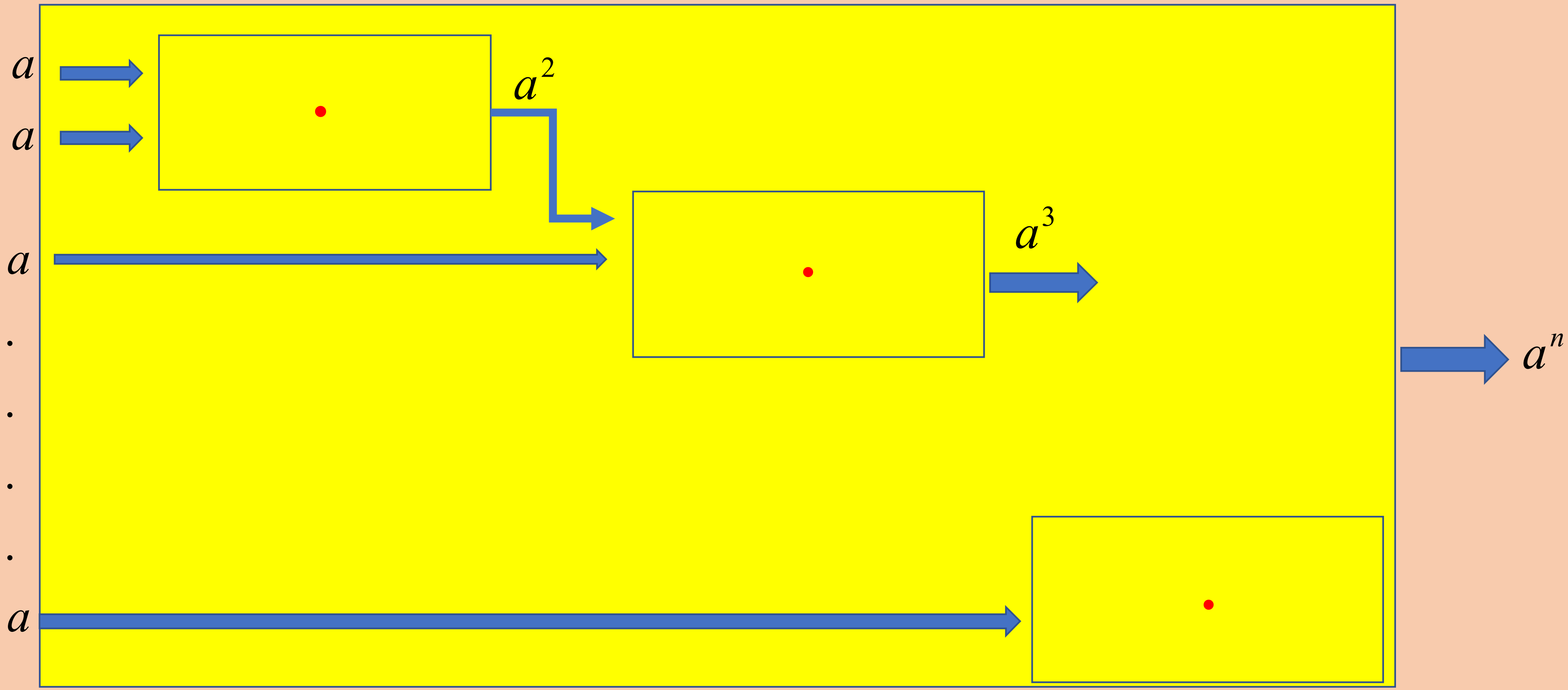
$x = y - 6 \leftarrow$ sottrae 6 $\leftarrow y$

Le funzioni inverse delle operazioni elementari

$x \rightarrow$ molt. per 6 $\rightarrow y = 6x$

$x = \dfrac{y}{6} \leftarrow$ divide per 6 $\leftarrow y$

La funzione potenza



La funzione radice

Se n è dispari

$$x \in R \rightarrow \boxed{\sqrt[n]{}} \rightarrow y = \sqrt[n]{x}$$

Se n è pari

$$x \in [0; +\infty[\rightarrow \boxed{\sqrt[n]{}} \rightarrow y = \sqrt[n]{x}$$

Ovviamente la funzione radice e la funzione potenza (rispettando i relativi «domini») sono funzioni una inversa dell'altra.

Composizione di funzione e determinazione della funzione inversa

$$x \rightarrow \boxed{\text{molt. per a}} \rightarrow ax \rightarrow \boxed{\text{somma b}} \rightarrow ax+b \rightarrow \boxed{\text{divide per c}} \rightarrow \frac{ax+b}{c} = y$$

$$x \xrightarrow{\cdot a} ax \xrightarrow{+b} ax+b \xrightarrow{:c} \frac{ax+b}{c} = y$$

$$x = \frac{cy-b}{a} \leftarrow \boxed{\text{divide per a}} \leftarrow cy-b \leftarrow \boxed{\text{sottrae b}} \leftarrow cy \leftarrow \boxed{\text{molt. per c}} \leftarrow y$$

$$x = \frac{cy-b}{a} \xrightarrow{:a} cy-b \xrightarrow{-b} cy \xrightarrow{\cdot c} y$$

$$\left(\dots h \circ g \circ f\right)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1} \circ \dots$$

«Per vestirmi i piedi» mi metto le calze e poi le scarpe. Se voglio tornare a piedi nudi….

Cosa diciamo agli allievi per ricavare la funzione inversa ?

a) Ricava in funzione di x
b) Poi scambia la x con la y e otterrai $y = f^{-1}(x)$

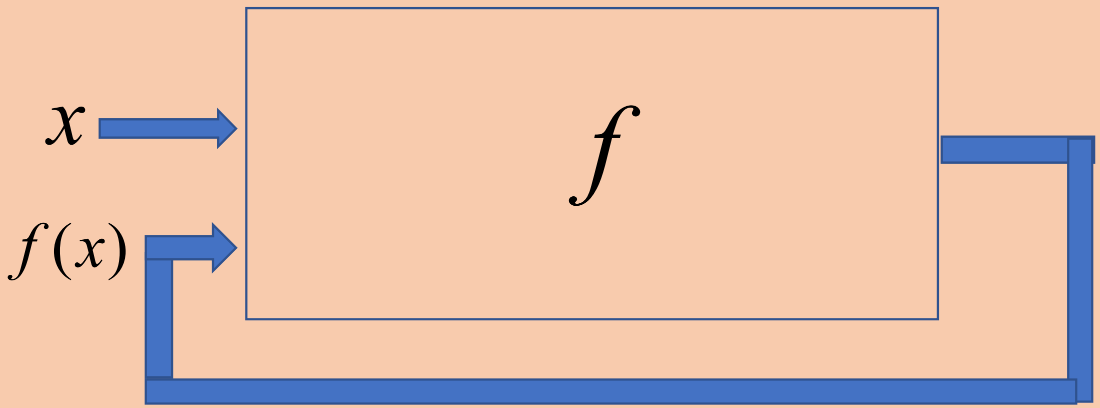
$$\underbrace{y = \frac{2x+3}{5}}_{y=f(x)} \Rightarrow \underbrace{x = \frac{5y-3}{2}}_{x=f^{-1}(y)} \overset{x\leftrightarrow y}{\Rightarrow} \underbrace{y = \frac{5x-3}{2}}_{y=f^{-1}(x)}$$

E’ interessante osservare che se rappresentassimo tali equazioni nel piano cartesiano:

a) Il grafico di y=f(x) e quello di $x = f^{-1}(y)$ coincidono ! E’ la stessa equazione scritta in modo diverso !
b) È lo scambio di nome tra x e y (per far in modo che alla variabile in ingresso sia dia il nome x) che produce la nota simmetria rispetto alla bisettrice tra il grafico di una funzione e della sua inversa

Automi «iterativi» (caso continuo)

Si ottengono reimmettendo all'ingresso il valore di uscita dall'automa. L'iterazione può avvenire n volte. Detta $f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\text{n volte}}$ l'iterata n-esima della funzione diremo che essa **ciclica di periodo n se** $f^n(x) = x \quad \text{per } \forall x \in D_f$

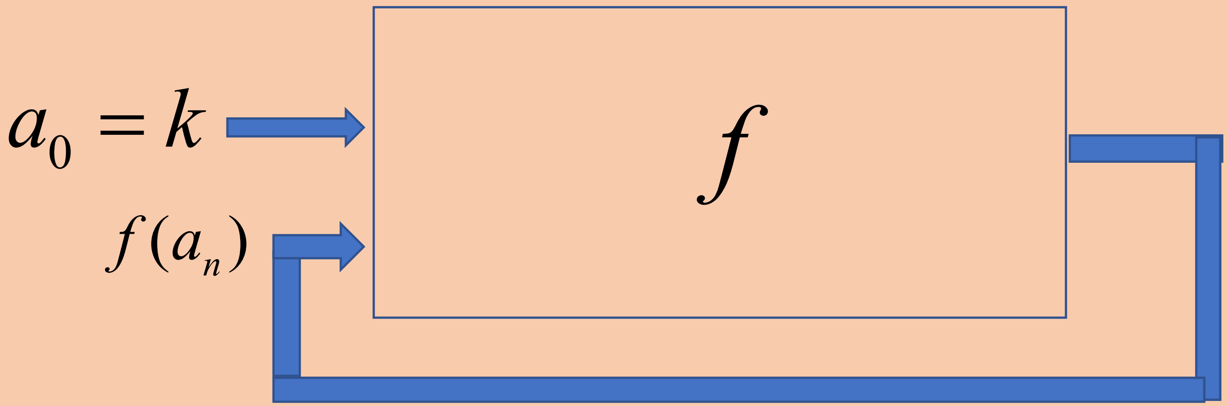


Automi «iterativi» (caso discreto)

Nel caso discreto, in cui variabile di ingresso è il un numero , gli automi ciclici realizzano le

successioni date per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = k & \text{valore iniziale} \\ a_{n+1} = f(a_n) \quad \forall n \in N & \text{relazione di ricorrenza} \end{cases}$$



Evoluzione dei sistemi iterativi

Se affrontato in generale, per qualsiasi tipo di funzione, l'argomento è molto complesso e fa parte di quella disciplina detta «sistemi dinamici» che afferisce alla teoria del caos. Malgrado questo, è possibile implementare un metodo grafico per cercare di rispondere a vari quesiti:

a) Se eseguiamo l'iterazione funzionale n volte qual è $\lim_{n\to+\infty} f^n(x_0)$?
b) Esso dipende, come sembra naturale, dal valore x_0 inizialmente introdotto nell'automa, o vi sono casi in cui tale limite è indipendente dal valore iniziale ?
c) E' possibile accorgersi che una funzione (o una successione) è ciclica di periodo n ?

Per rispondere a queste domande possiamo fare semplici esperimenti numerici usando un foglio di calcolo (es. Excel). La simulazione è molto rapida e consiste nello scrivere la dipendenza funzionale nella prima riga di una tabella e servirsi della possibilità fornita dal foglio di calcolo, di replicare la dipendenza funzionale.

Iterazione di funzione lineare (studio algebrico)

Data la funzione lineare $f(x) = mx + q$ allora (con m diverso da 0)

$$f^2(x) = f(f(x)) = m \cdot (mx + q) + q = m^2 x + qm + q = m^2 x + q \cdot (1 + m)$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = m \cdot \left(m^2 x + qm + q\right) + q = m^3 x + qm^2 + qm + q = m^3 x + q \cdot (1 + m + m^2)$$

....

$$f^n(x) = m^n x + q \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} m^k \right)$$

Dimostratelo per induzione !!

Si osservi che:

$$\text{Se } m = 1 \Rightarrow f^n(x) = x + q \cdot n \quad \text{progressione aritmetica}$$

$$\text{Se } m = -1 \Rightarrow f^n(x) = \begin{cases} x & \text{se } n \text{ è pari} \\ -x + q & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Iterazione di funzione lineare (studio algebrico)

Si osservi che se $f(x_0) = x_0 \Rightarrow mx_0 + q = x_0$ cioè per $x_0 = \dfrac{q}{1-m}$

si ottiene che $f^n(x_0) = x_0$ cioè si ottiene le iterate assumono valore costante

Per $x_0 \neq \dfrac{q}{1-m}$ conoscendo la teoria delle serie geometriche

$$\text{Se } |m| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f^n(x) = \lim_{n \to +\infty} \left[m^n x + q \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} m^k \right) \right] = \frac{q}{1-m} \quad \text{E' indipendente da } x!!$$

$$\text{Se } m > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f^n(x) = \lim_{n \to +\infty} \left[m^n x + q \cdot \left(\frac{1-m^n}{1-m} \right) \right] = \left[m^n \cdot \left(x - \frac{q}{1-m} \right) + \frac{q}{1-m} \right] = \pm\infty$$

dove il segno dell’infinito dipende dal segno di x-q/(1-m), cioè a seconda ci si collochi a destra o sinistra del valore dell’x iniziale che rende costante la funzione

$$\text{Se } m < -1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f^n(x) = \lim_{n \to +\infty} \left[m^n x + q \cdot \left(\frac{1-m^n}{1-m} \right) \right] = \nexists$$

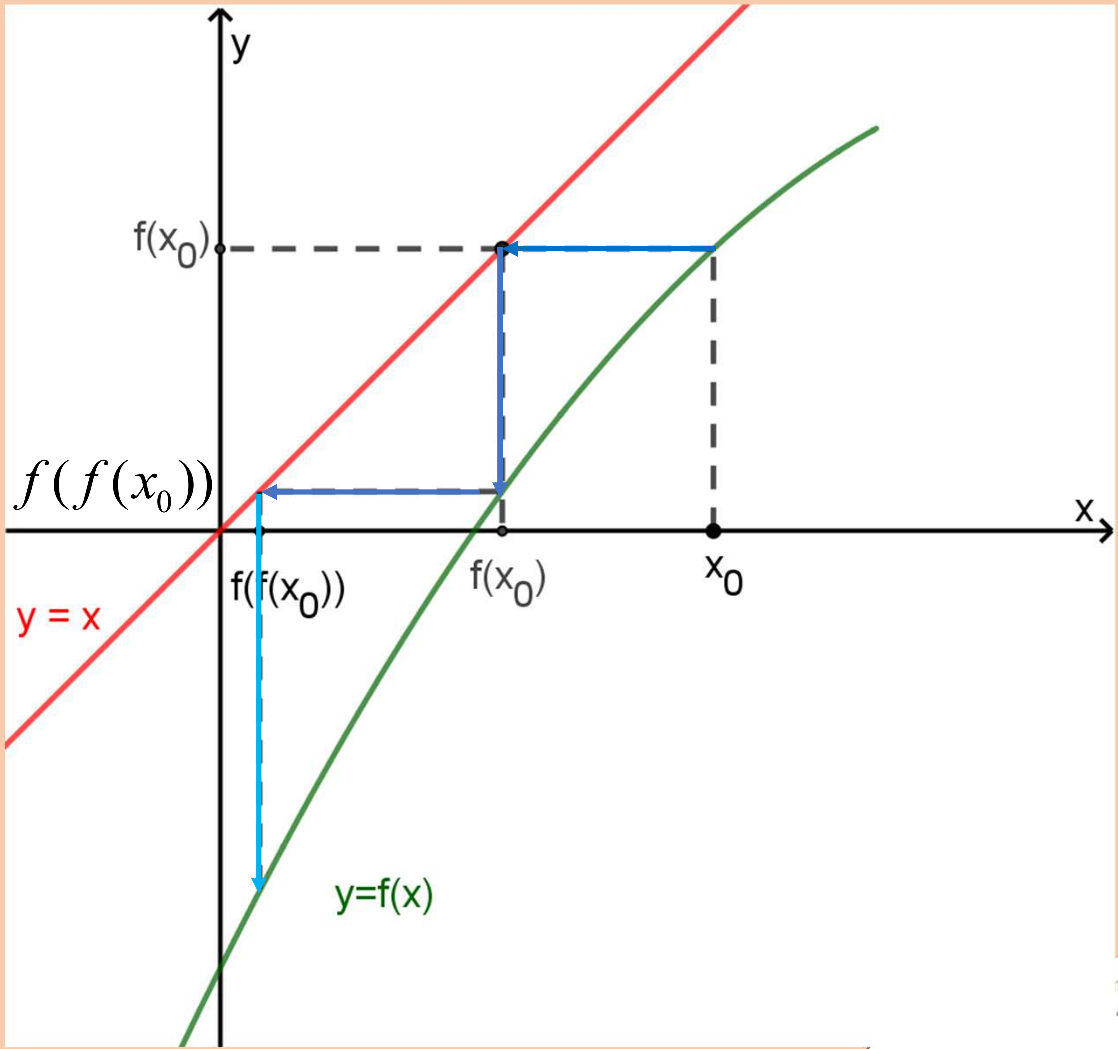
Estensioni delle iterazione lineare alle successioni date per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = x_0 \\ a_{n+1} = m \cdot a_n + q \end{cases} \Rightarrow \mathrm{a}_{\mathrm{n}} \text{ ha il ruolo di } x$$

Studiare $f^n(x) = \frac{1}{2}x + 2$ per un dato valore iniziale x_0

è come studiare la successione ricorsiva $\begin{cases} a_0 = x_0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n + 2 \end{cases}$

Procedura grafica per studiare l'evoluzione della funzione iterata al variare del valore di ingresso x_0



Iterazioni di funzioni lineari

|m|<1			m=1			m=-1			m>1			m<-1		
n	**x**	**f(x)**	**n**	**x**	**f(x)**	**n**	**x**	**f(x)**	**n**	**x**	**f(x)**	**n**	**x**	**f(x)**
1	2	3	1	2	4	1	2	0	1	2	5	1	2	-1
2	3	3,5	2	4	6	2	0	2	2	5	9,5	2	-1	3,5
3	3,5	3,75	3	6	8	3	2	0	3	9,5	16,25	3	3,5	-3,25
4	3,75	3,875	4	8	10	4	0	2	4	16,25	26,375	4	-3,25	6,875
5	3,875	3,9375	5	10	12	5	2	0	5	26,375	41,563	5	6,875	-8,313
6	3,9375	3,96875	6	12	14	6	0	2	6	41,563	64,344	6	-8,313	14,469
7	3,96875	3,984375	7	14	16	7	2	0	7	64,344	98,516	7	14,469	-19,7
8	3,984375	3,9921875	8	16	18	8	0	2	8	98,516	149,77	8	-19,7	31,555
9	3,992188	3,9960938	9	18	20	9	2	0	9	149,77	226,66	9	31,555	-45,33
10	3,996094	3,9980469	10	20	22	10	0	2	10	226,66	341,99	10	-45,33	69,998
11	3,998047	3,9990234	11	22	24	11	2	0	11	341,99	514,99	11	69,998	-103
12	3,999023	3,9995117	12	24	26	12	0	2	12	514,99	774,48	12	-103	156,5
13	3,999512	3,9997559	13	26	28	13	2	0	13	774,48	1163,7	13	156,5	-232,7
14	3,999756	3,9998779	14	28	30	14	0	2	14	1163,7	1747,6	14	-232,7	351,12
15	3,999878	3,999939	15	30	32	15	2	0	15	1747,6	2623,4	15	351,12	-524,7
16	3,999939	3,9999695	16	32	34	16	0	2	16	2623,4	3937	16	-524,7	789,01
17	3,999969	3,9999847	17	34	36	17	2	0	17	3937	5907,6	17	789,01	-1182
18	3,999985	3,9999924	18	36	38	18	0	2	18	5907,6	8863,4	18	-1182	1774,3
19	3,999992	3,9999962	19	38	40	19	2	0	19	8863,4	13297	19	1774,3	-2659
20	3,999996	3,9999981	20	40	42	20	0	2	20	13297	19948	20	-2659	3991,1

Iterazioni di funzioni lineari
(studio grafico con il software «Geogebra»)

Riotteniamo tutti i risultati ottenuti algebricamente che richiedono un apparato matematico da fine scuole superiori (primo anno università) con simulazioni algebriche utilizzando la procedura grafica illustrata in precedenza.

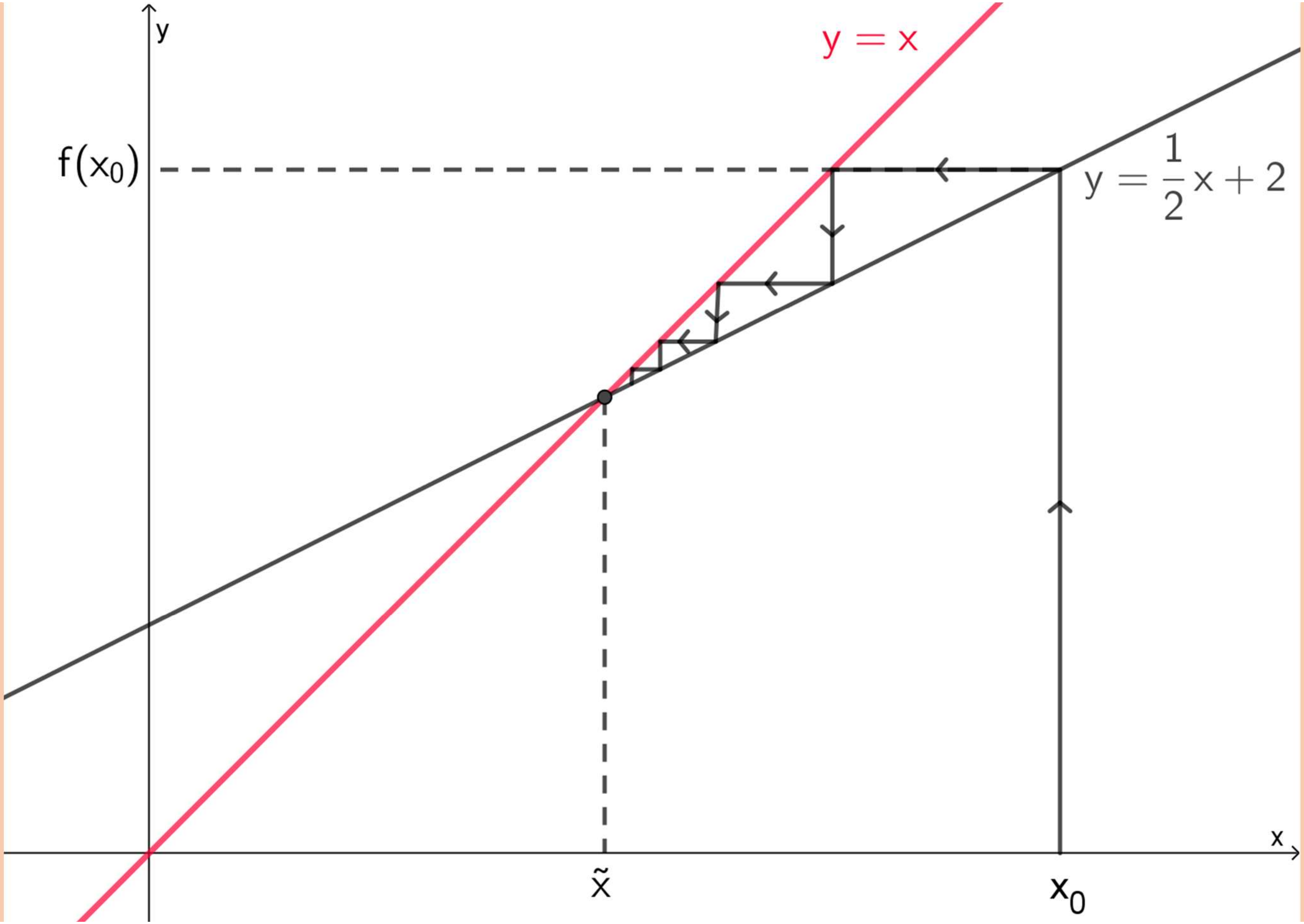
$-1 < m < 1$

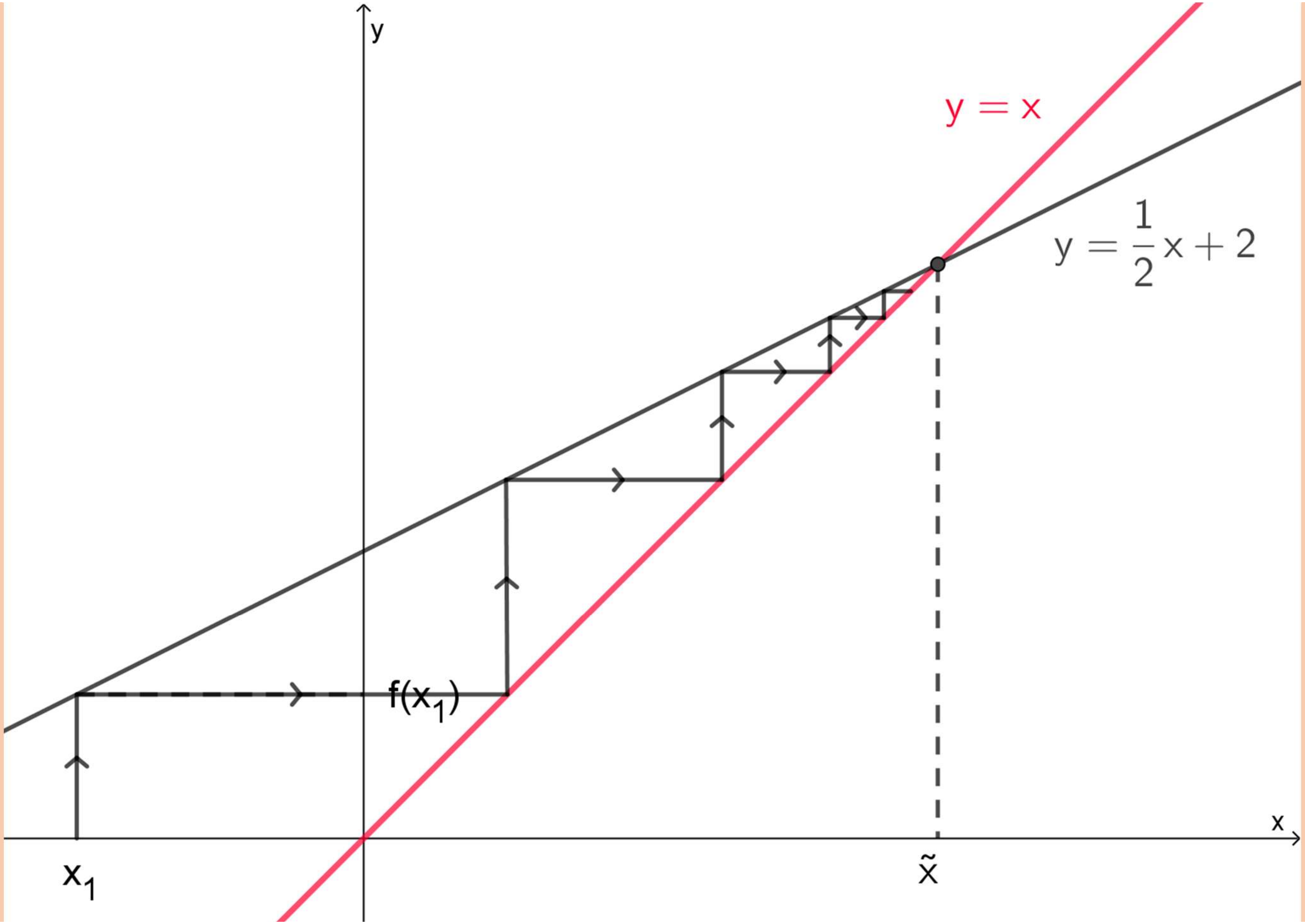
$m = 1$

$m = -1$

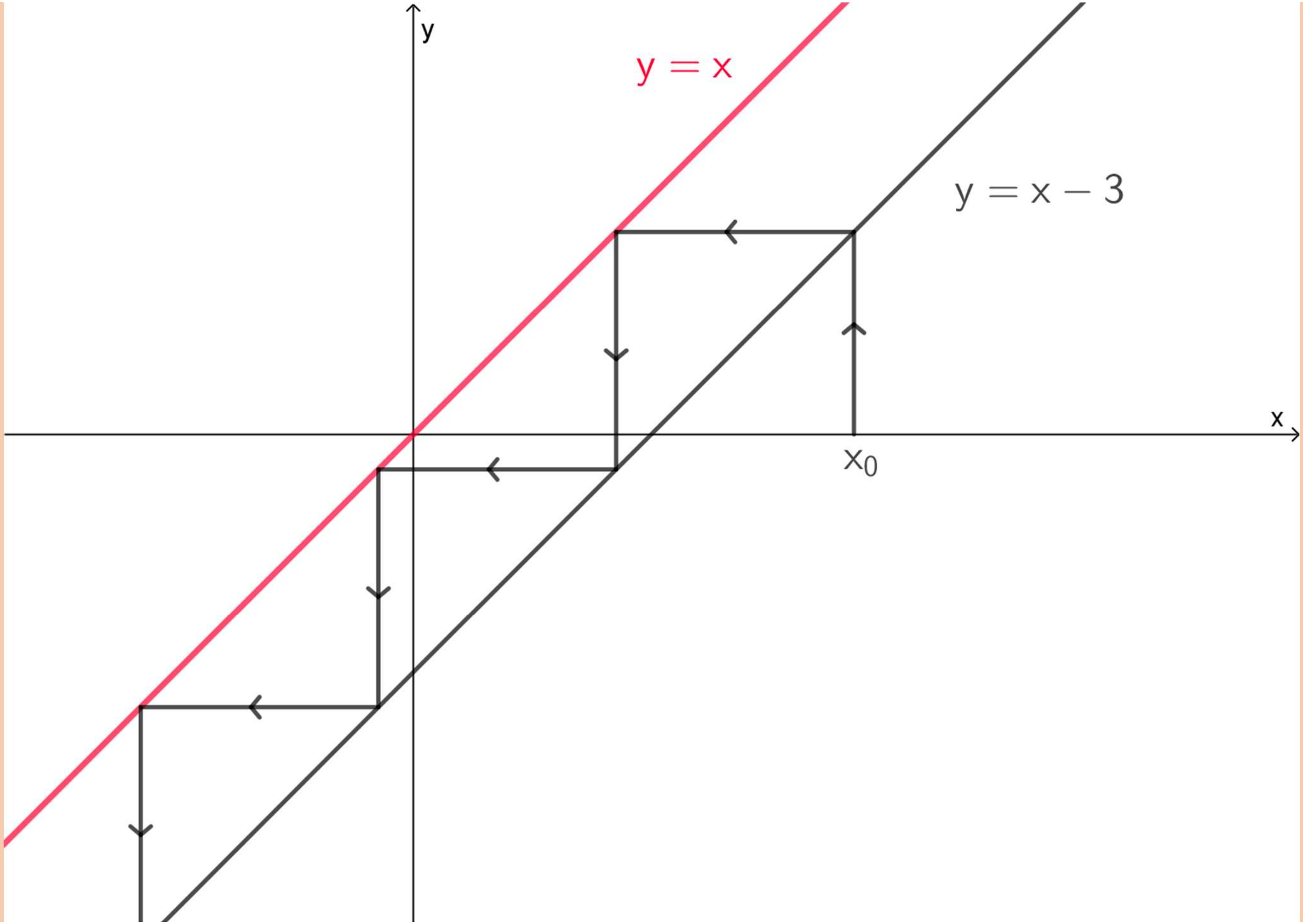
$m > 1$

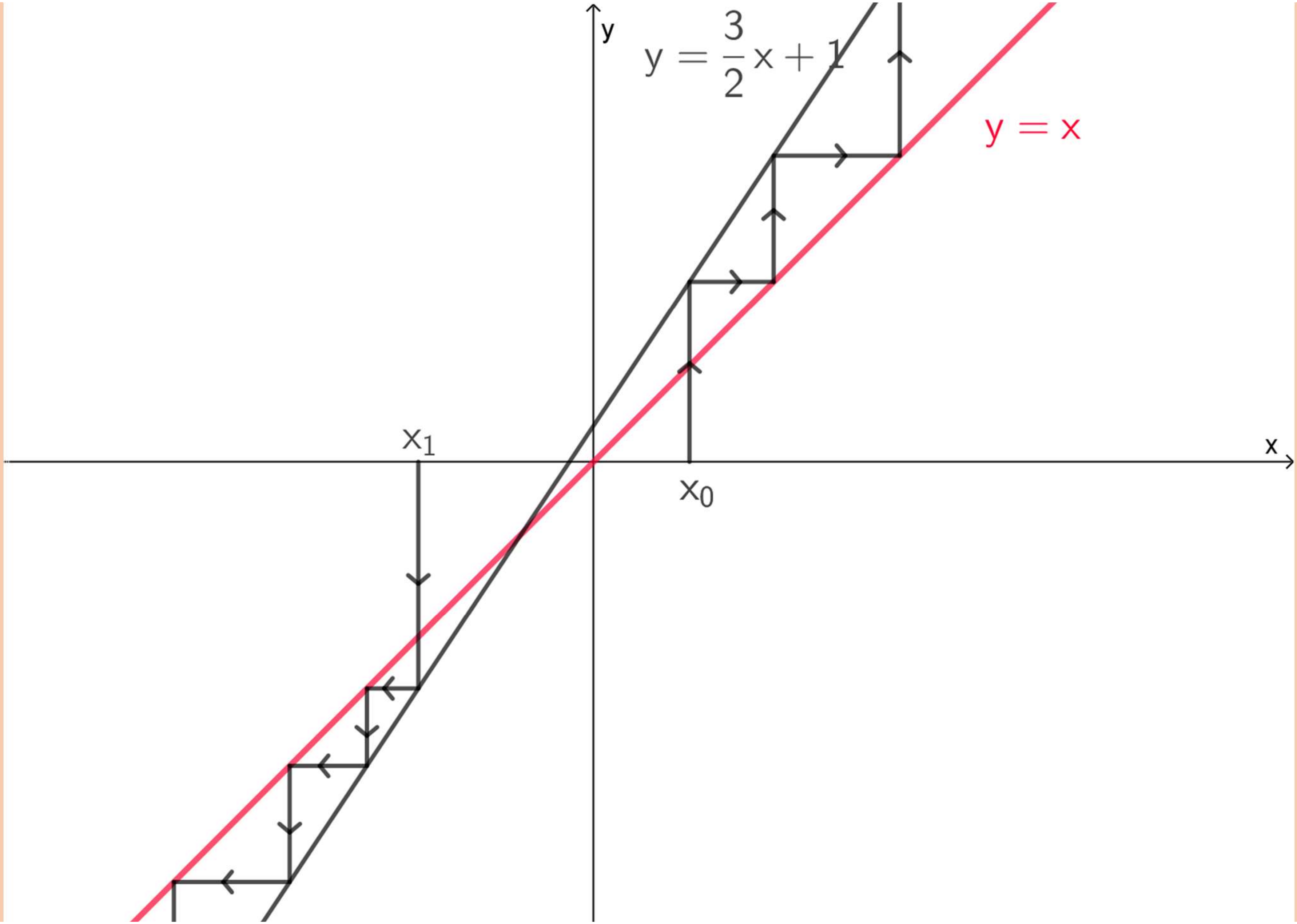
$m < -1$

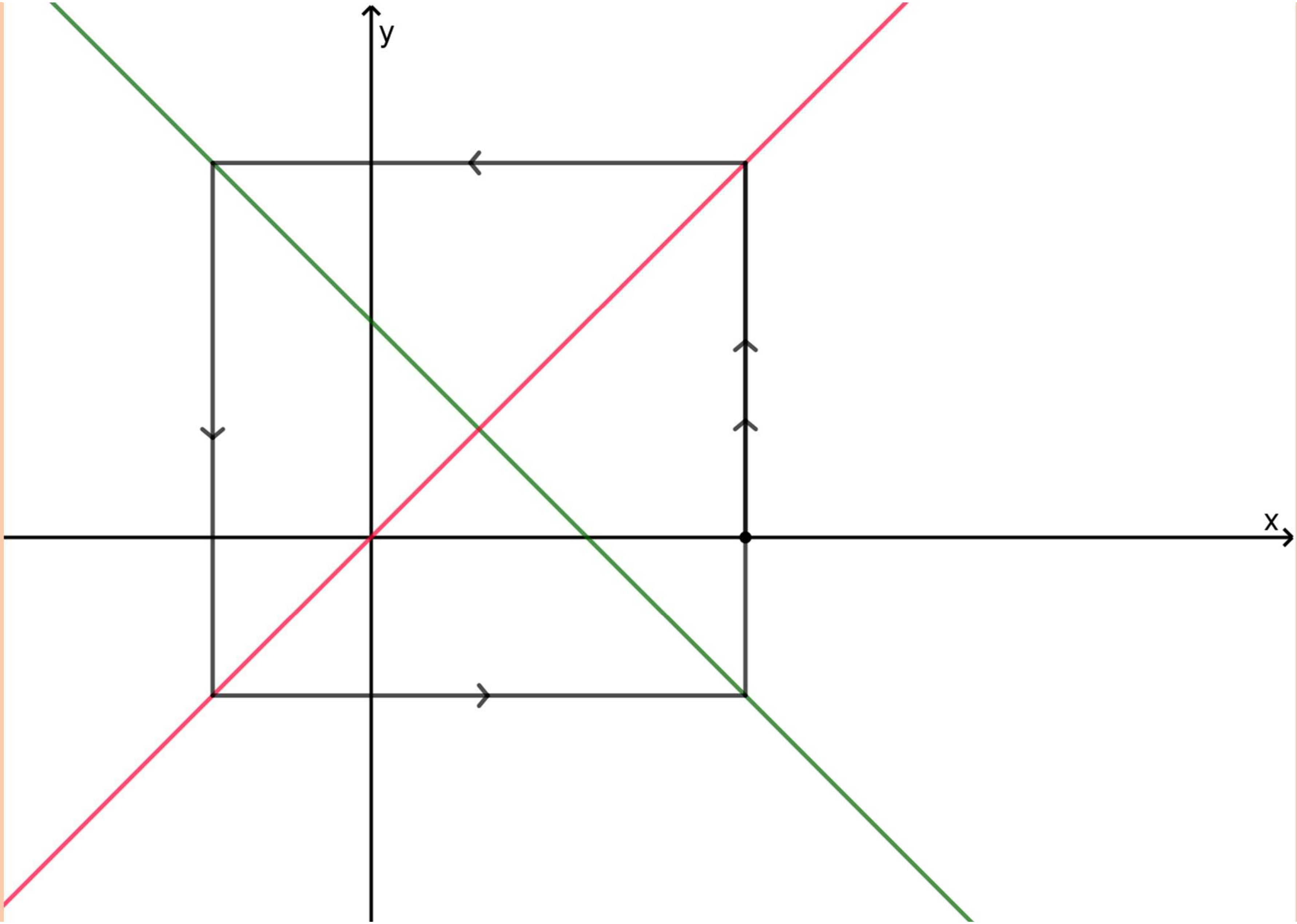

y
y = x
f(x0)
y = 1/2 x + 2
x
x̃
x0



y
$y = x$
$y = \frac{1}{2}x + 2$
$f(x_1)$
x
x_1
$\tilde{x}$


y
y = x
y = x − 3
x
x0


y
$y = \frac{3}{2}x + 1$
$y = x$
x
x_1
x_0


y
x

Un quesito intrigante dai «Giochi Matematici»

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1} \end{cases} \Rightarrow \text{Quanto vale } a_{87}\,?$$

$$a_0 = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a_3 = \frac{-\frac{1}{3}-1}{-\frac{1}{3}+1} = -2 \Rightarrow a_4 = \frac{-2-1}{-2+1} = 3 = a_0$$

Conoscete altre funzioni, oltre quelle lineari, le cui iterate sono della stessa natura della funzione di partenza ?

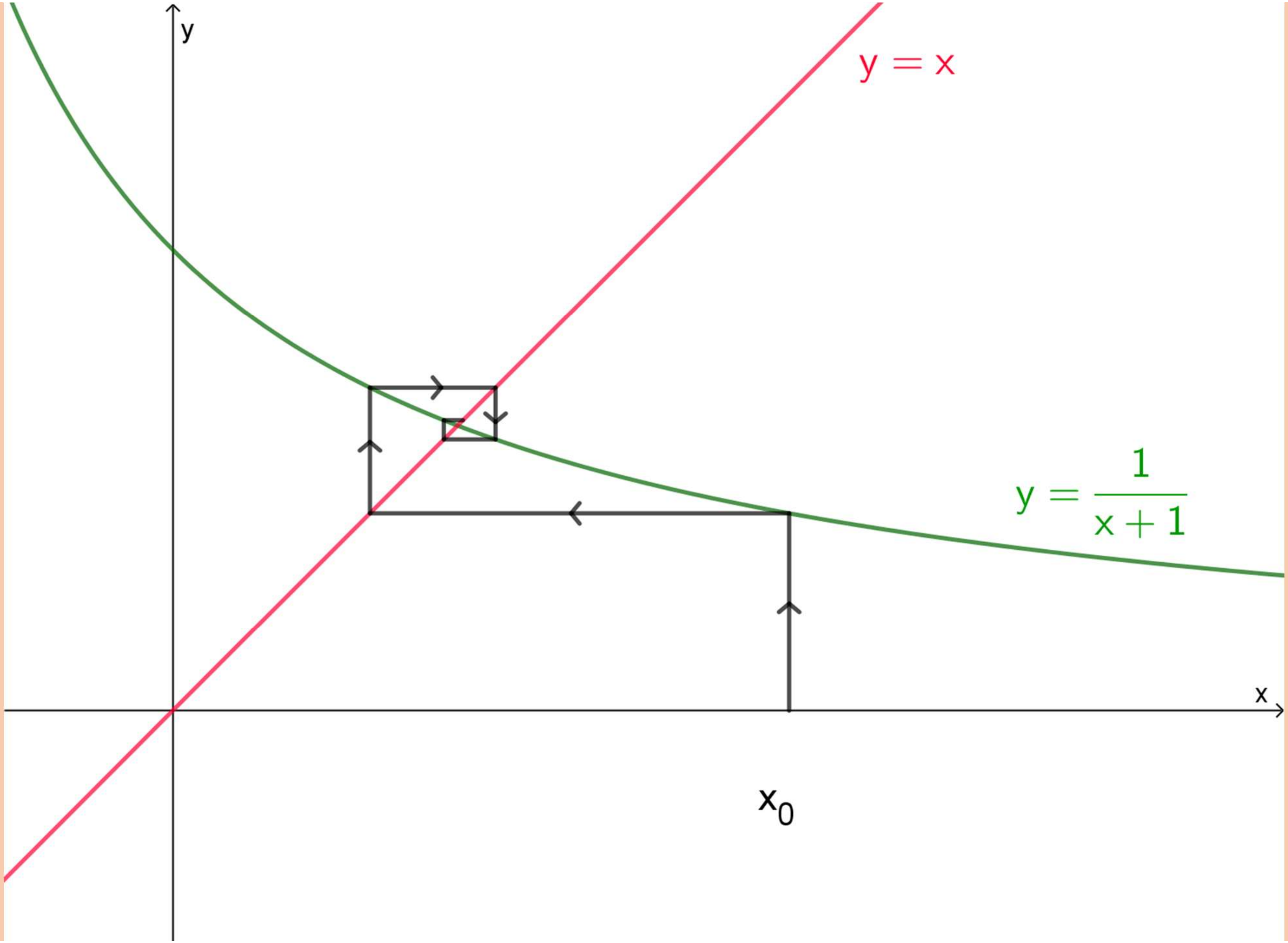
R: le funzioni omografiche

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{con } c \neq 0 \ \text{ e } \ \Delta = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0$$

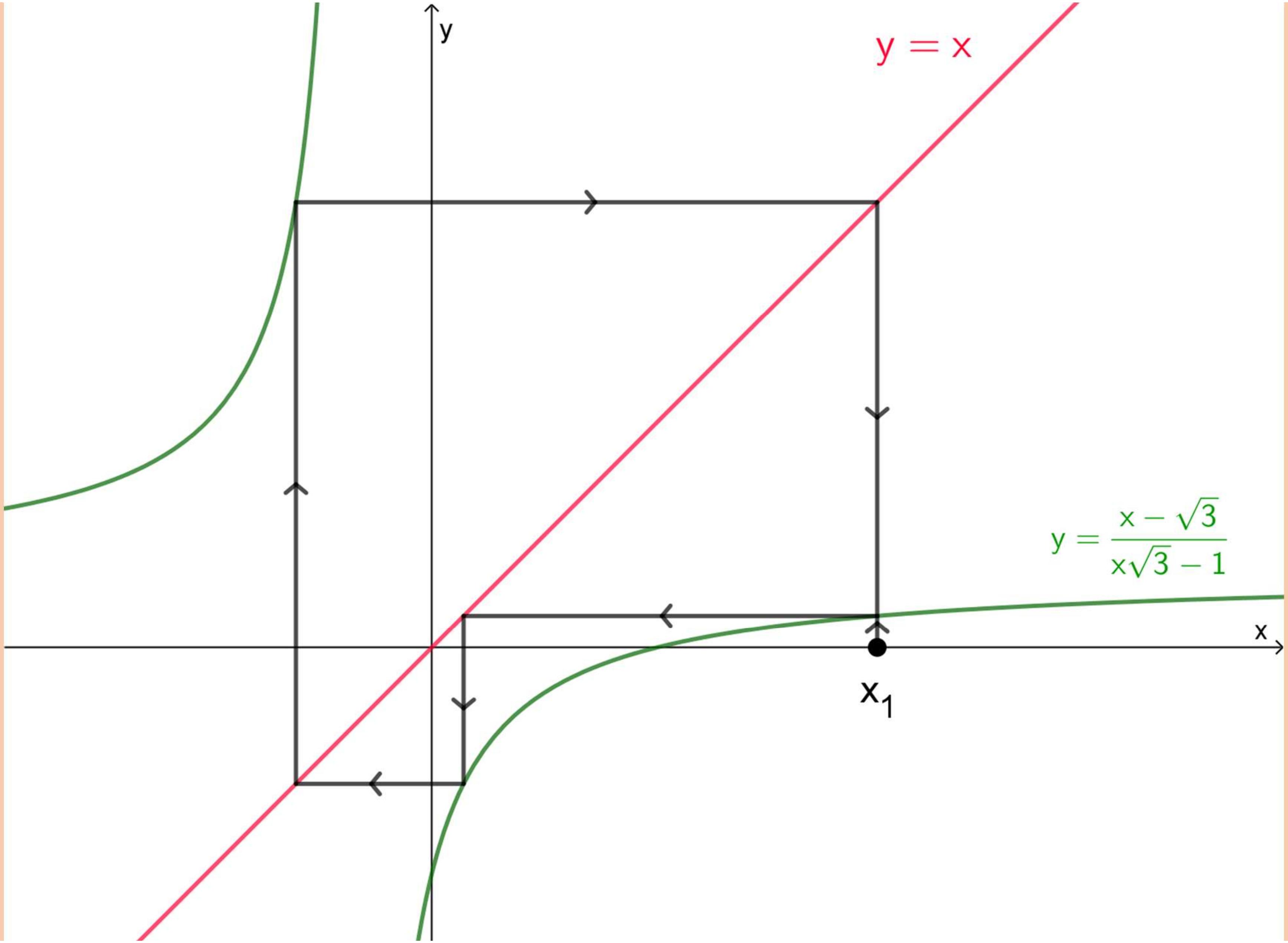
$$f^2(x) = \frac{a \cdot \frac{ax+b}{cx+d} + b}{c \cdot \frac{ax+b}{cx+d} + d} = \frac{\overbrace{(a^2+bc)}^{a'}x + \overbrace{ab+bd}^{b'}}{\underbrace{(ac+dc)}_{c'}x + \underbrace{cb+d^2}_{d'}}$$

Iterazioni di funzioni omografiche

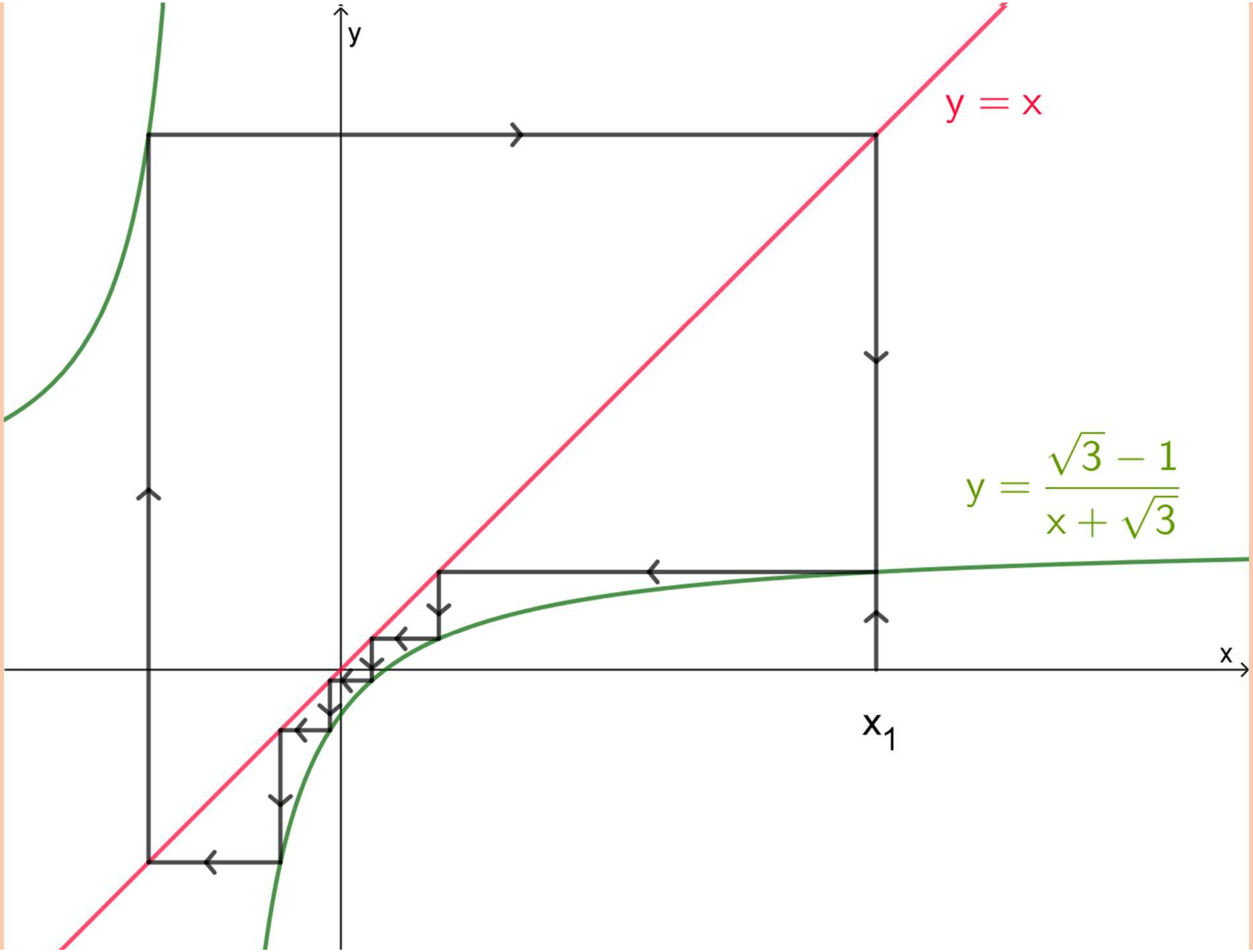
Fibonacci			ciclo 2			ciclo 3			ciclo 4			ciclo 6		
n	**x**	**f(x)=1/(x+1)**	**n**	**x**	**f(x)**	**n**	**x**	**f(x)**	**n**	**x**	**f(x)**	**n**	**x**	**f(x)**
1	2	0,333333333	1	2	0,5	1	2	0,06002	1	2	0,3333	1	2	0,6603
2	0,333333	0,75	2	0,5	2	2	0,06	-1,5146	2	0,3333	-0,5	2	0,6603	0,06
3	0,75	0,571428571	3	2	0,5	3	-1,515	2	3	-0,5	-3	3	0,06	-0,5
4	0,571429	0,636363636	4	0,5	2	4	2	0,06002	4	-3	2	4	-0,5	-1,515
5	0,636364	0,611111111	5	2	0,5	5	0,06	-1,5146	5	2	0,3333	5	-1,515	-16,66
6	0,611111	0,620689655	6	0,5	2	6	-1,515	2	6	0,3333	-0,5	6	-16,66	2
7	0,62069	0,617021277	7	2	0,5	7	2	0,06002	7	-0,5	-3	7	2	0,6603
8	0,617021	0,618421053	8	0,5	2	8	0,06	-1,5146	8	-3	2	8	0,6603	0,06
9	0,618421	0,617886179	9	2	0,5	9	-1,515	2	9	2	0,3333	9	0,06	-0,5
10	0,617886	0,618090452	10	0,5	2	10	2	0,06002	10	0,3333	-0,5	10	-0,5	-1,515
11	0,61809	0,618012422	11	2	0,5	11	0,06	-1,5146	11	-0,5	-3	11	-1,515	-16,66
12	0,618012	0,618042226	12	0,5	2	12	-1,515	2	12	-3	2	12	-16,66	2
13	0,618042	0,618030842	13	2	0,5	13	2	0,06002	13	2	0,3333	13	2	0,6603
14	0,618031	0,618035191	14	0,5	2	14	0,06	-1,5146	14	0,3333	-0,5	14	0,6603	0,06
15	0,618035	0,61803353	15	2	0,5	15	-1,515	2	15	-0,5	-3	15	0,06	-0,5
16	0,618034	0,618034164	16	0,5	2	16	2	0,06002	16	-3	2	16	-0,5	-1,515
17	0,618034	0,618033922	17	2	0,5	17	0,06	-1,5146	17	2	0,3333	17	-1,515	-16,66
18	0,618034	0,618034014	18	0,5	2	18	-1,515	2	18	0,3333	-0,5	18	-16,66	2
19	0,618034	0,618033979	19	2	0,5	19	2	0,06002	19	-0,5	-3	19	2	0,6603
20	0,618034	0,618033992	20	0,5	2	20	0,06	-1,5146	20	-3	2	20	0,6603	0,06



y
$y = x$
$y = \frac{1}{x+1}$
x
x_0



y
x
$y = x$
$y = \frac{x - \sqrt{3}}{x\sqrt{3} - 1}$
x_1


y
x
$y = x$
$y = \frac{\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}$
x_1

Iterazioni di funzioni omografiche (studio grafico con il software «Geogebra»)

Riotteniamo tutti i risultati ottenuti algebricamente che richiedono un apparato matematico da fine scuole superiori (primo anno università) con simulazioni algebriche utilizzando la procedura grafica illustrata in precedenza.

Fibonacci

ciclo 3

ciclo 6

ciclo 2

ciclo 4

Creazioni di funzioni omografiche cicliche (con periodo desiderato)

Riscaldamento: il ciclo 2 (le funzioni omografiche autoinverse o involutive)

$$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f^2(x)=f(f(x))=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

Riscaldamento: il ciclo 3 (le funzioni omografiche cicliche)

$$f(x)=\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}x+1}\Rightarrow f^3(x)=x$$

$$f(x)=\frac{\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}}=\frac{\cos(60°)x-sen(60°)}{sen(60°)x+\cos(60°)}\Rightarrow\begin{pmatrix}\cos(60°) & -sen(60°)\\ sen(60°) & \cos 60°\end{pmatrix}$$

Se è un ciclo 3, perché 60° e non 120° come ci si aspetterebbe pensando all'angolo giro? Cosa c'entra la matrice di rotazione ?

Chiariamo il «mistero» delle funzioni omografiche cicliche

Rotazione di punti nel piano $\begin{cases} x' = x\cos\theta - ysen\vartheta \\ y' = xsen\theta + y\cos\theta \end{cases}$

o in forma matriciale $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\vartheta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Per sviscerare il legame con le funzioni omografiche associamo ad ogni punto P(x;y) del piano , la propria «direzione» univocamente determinata dal rapporto:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{m_{OP}} = t$$

Nel caso delle funzione omografica

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix} \Rightarrow t' = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{mentre } t = \frac{x}{y}$$

In pratica possiamo reinterpretare la rotazione di punti del piano come rotazioni di direzioni (punti impropri si direbbe in geometria proiettiva)

Chiariamo il «mistero» delle funzioni omografiche cicliche

In pratica possiamo reinterpretare la rotazione di punti del piano come rotazioni di direzioni (punti impropri si direbbe in geometria proiettiva) di un angolo ϑ . Ciò spiega:

a) Perché, se prendiamo un angolo ϑ commensurabile con π il ciclo si chiude;
b) Perché il periodo è $T=\pi$ e non 2π
c) Perché anziché prendere la matrice di rotazione $\begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\vartheta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ possiamo prendere qualsiasi matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\vartheta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{con } \theta = \text{arcsen}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

In pratica è come eseguissimo una rotazione seguita da un'omotetia di fattore $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Ma attenzione: le direzioni sono punti uniti dell'omotetie; cioè le omotetie con centro nell'origine non alterano la direzione.

$$f(x) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$f^2(x) = \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = \frac{-2}{2x} = -\frac{1}{x}$$

$$f^3(x) = \frac{-\frac{1}{x} - 1}{-\frac{1}{x} + 1} = \frac{-1-x}{x-1}$$

$$f^4(x) = \frac{\frac{-1-x}{x-1} - 1}{\frac{-1-x}{x-1} + 1} = \frac{-2x}{-2} = x$$

Esempio di ciclo 4